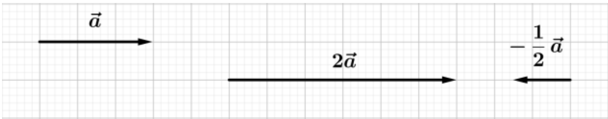
§3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA:

- *Cho số thực* $k \neq 0$ *và vectơ* $\vec{a} \neq \vec{0}$. *Tích của vectơ* $\vec{a}$ *với số k là một vectơ, ký hiệu là* $k\vec{a}$, *cùng hướng với* $\vec{a}$ *nếu* $k > 0$, *ngược hướng với* $\vec{a}$ *nếu* $k < 0$ *và có độ dài bằng* $|k|\left|\vec{a}\right|$.



- *Quy ước:* $0.\vec{a} = \vec{0}$ *và* $k.\vec{0} = \vec{0}$.

II. TÍNH CHẤT:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực *h* và *k* ta có:

+ $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

+ $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

+ $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

+ $1.\vec{a} = \vec{a}; -1.\vec{a} = -\vec{a}$

III. TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM TAM GIÁC:

- *Nếu I là trung điểm đoạn AB thì với mọi điểm M ta có:* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

- *Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có:* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

<u>Chứng minh</u>

....

....

....

....

....

IV. ĐIỀU KIỆN HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG:

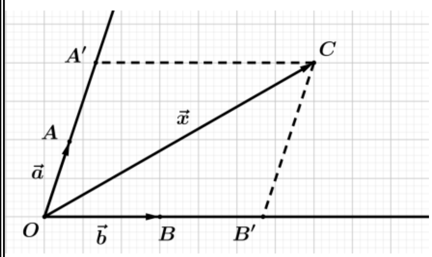
- *Hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b} \neq \vec{0}$ *cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho* $\vec{a} = k\vec{b}$.

- *Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số thực k sao cho* $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

V. PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG:

- *Cho hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *không cùng phương. Khi đó mọi vectơ* $\vec{x}$ *đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, *nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho* $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

<u>Chứng minh</u>



....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP

Vấn đề 1: Chứng minh đẳng thức vectơ

Bài 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác và O là điểm tùy ý.

a) CMR: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$ b) CMR: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC và BD.

a) CMR: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$ b) CMR: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

Bài 3. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến; D là trung điểm của AM. Cmr:

a) $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ b) $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OD}$ (*O tùy ý*)

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. M, N là trung điểm BC và CD. Cmr:

a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{BM}$ b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Vấn đề 2: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho ΔABC, điểm M trên đoạn BC sao cho $MB=2MC$. Điểm N thỏa $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=\vec{0}$.

a) Cmr: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Gọi P là trung điểm MN. Tính $\overrightarrow{AP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Bài 2. Cho ΔABC, M$\in$AB sao cho $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB}$, N$\in$AC sao cho $\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{AN}=\vec{0}$ và K là trung điểm của MN.

a) Cmr: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

b) Điểm L$\in$BC sao cho $3\overrightarrow{BL}-2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$. Chứng minh A, K, L thẳng hàng.

Bài 3. Cho ΔABC, đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

a) Gọi P là điểm đối xứng của B qua C. Tính $\overrightarrow{AP}$ theo $\vec{u},\vec{v}$

b) Gọi Q, R là 2 điểm định bởi $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Tính $\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ}$ theo $\vec{u},\vec{v}$

c) Chứng minh P, Q, R thẳng hàng

Bài 4. Cho ΔABC có G là trọng tâm của tam giác.

a) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Lấy M, N trên AB, AC mà $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$

c) Cho P là trung điểm MN. Tính $\overrightarrow{GP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Bài 5. Cho ΔABC có $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC};\ \overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0};\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) CMR: M, N, P thẳng hàng

Bài 6. Cho tam giác ABC trên AC lấy I mà $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$, J là điểm mà $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) CMR: $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

b) CMR: B, I, J thẳng hàng.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD, trên BC lấy E mà $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$,trên BD lấy F mà $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Tính $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$. Từ đó suy ra A, E, F thẳng hàng.

Bài 8. Cho ΔABC. Trên cạnh AB, BC lấy hai điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$. Gọi K là điểm thỏa $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$. CMR: M, N, K thẳng hàng.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD, I$\in$BC sao cho $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$ và E$\in$CD sao cho $\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$. Chứng minh A, I, E thẳng hàng.

Bài 10. Cho hình vuông ABCD, trên đoạn AB lấy điểm I sao cho $3BI-2AB=0$, trên BD lấy điểm F thỏa $3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FD}=\vec{0}$. Hai điểm D và E đối xứng nhau qua điểm C. Chứng minh rằng: I, F, E cùng thuộc một đường thẳng.